SMIA (S1), Algèbre 1
Série N° : 2

Pour les exercices 6 et 8 voir : Cours d'algèbre de R. Godement, Réunions et intersetions.

Ex. 1 — Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que :

1) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
4) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
5) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

Answer (Ex. 1) — 1) On a $B_1 \cap B_2 \subset B_1$, donc $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1)$. De même, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_2)$, d'où $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, donc $f(x) \in B_1 \cap B_2$, alors $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$, d'où l'autre inclusion.
2) Comme pour 1), $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \supset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$, alors $f(x) \in B_1 \cup B_2$, donc $f(x) \in B_1$ ou $f(x) \in B_2$, par suite $x \in f^{-1}(B_1)$ ou $x \in f^{-1}(B_2)$, d'où $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, et on obtient l'autre inclusion.
3) On a $A_1 \subset A_1 \cup A_2$, donc $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. De même, $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$, d'où $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$, alors $y = f(x)$ où $x \in A_1 \cup A_2$. Donc $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$. D'où $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, et on obtient l'autre inclusion.
4) On a $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, alors $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$. De même, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$. D'où 4).
5) Soit $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y - B) &\Leftrightarrow f(x) \in Y - B \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin B \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in X - f^{-1}(B), \end{aligned}$$

d'où 5).

Ex. 2 — Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est injective.
b) $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie A de X.
c) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ pour toutes parties A_1, A_2 de X.

Answer (Ex. 2) — *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Soit A une partie de X. On a toujours (voir les notes de cours) $f^{-1}(f(A)) \supset A$. Montrons l'autre inclusion. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) \in f(A)$ c'est-à-dire, $f(x) = f(x')$ où $x' \in A$. Puisque f est injective, $x = x' \in A$.
b) $\Rightarrow$ *a)*. Soient $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. On pose $A = \{x'\}$. On a $f(A) = \{f(x')\}$ et $x \in f^{-1}(f(A)) = A$ d'où $x = x'$.
a) $\Rightarrow$ *c)*. D'après 4) de Ex. 1, On a toujours $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Montrons l'autre inclusion. Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, alors $y = f(x_1) = f(x_2)$ où $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$. Puisque f est injective, $x_1 = x_2$, d'où $y \in f(A_1 \cap A_2)$.
c) $\Rightarrow$ *a)*. Soient $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. On pose $A_1 = \{x\}$ et $A_2 = \{x'\}$. On a $f(x) = f(x') \in f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$. Donc $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ (car $f(\varnothing) = \varnothing$, voir cours), c'est-à-dire, $x = x'$.

Ex. 3 — Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est surjective.

b) $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie B de Y.

Answer (Ex. 3) — *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Soit $B \subset Y$. D'après les notes de cours, il suffit de montrer que $f(f^{-1}(B)) \supset B$. Soit $y \in B$, alors il exite $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Donc $x \in f^{-1}(B)$, d'où $y \in f(f^{-1}(B))$.
b) $\Rightarrow$ *a)*. Soit $y \in Y$. On pose $B = \{y\}$. On a $y \in B \subset f(f^{-1}(B))$. Donc $y = f(x)$ pour un certain $x \in X$.
Autre méthode : On prend $B = Y$, donc $Y = f(f^{-1}(Y)) = f(X)$ (car $f^{-1}(Y) = X$).

Ex. 4 — Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est injective.

b) Quelles que soient les applications $g, h : Z \to X$,

$$f \circ g = f \circ h \text{ implique } g = h.$$

Answer (Ex. 4) — *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Soient les applications $g, h : Z \to X$, telles que $f \circ g = f \circ h$. Soit $z \in Z$. On a $f(g(z)) = f(h(z))$ alors $g(z) = h(z)$. D'où $g = h$.
b) $\Rightarrow$ *a)*. Soient $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. On prend $Z = \{x\}$ et $g, h : Z \to X$ telles que $g(x) = x$ et $h(x) = x'$. On a $f \circ g = f \circ h$ donc $g = h$, c'est-à-dire, $x = g(x) = h(x) = x'$.

Ex. 5 — Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est surjective.

b) Quelles que soient les applications $g, h : Y \to Z$,

$$g \circ f = h \circ f \text{ implique } g = h.$$

Answer (Ex. 5) — *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Soient $g, h : Y \to Z$ des applications telles que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in Y$. Alors il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. D'où $g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$.
b) $\Rightarrow$ *a)*. Soit $g = 1_{f(X)} : Y \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de $f(X)$:
$g(y) = 1$ si $y \in f(X)$, $g(y) = 0$ si $y \notin f(X)$ (voir les exercices supplémentaires).

Soit $h : Y \to \{0,1\}$ l'application définie par $h(y) = 1$ pour tout $y \in Y$. On a $g \circ f = h \circ f$, donc $g = h$. Or h est la fonction caractéristique de Y. D'où $f(X) = Y$ (car $1_A = 1_B \Rightarrow A = B$) et f est surjective.

Ex. 6 — Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties d'un ensemble X. Montrer que

a)

$$X - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X - A_i).$$

b)

$$X - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X - A_i).$$

Ex. 7 — Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ deux familles non vides de parties d'un ensemble X. Montrer que

a)

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \bigcap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j).$$

b)

$$(\bigcap_{i \in I} A_i) \bigcup (\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j).$$

Answer (Ex. 7) — a) On pose $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, $B = \bigcup_{j \in J} B_j$, $C = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$.
Soit $(i,j) \in I \times J$. On a $A_i \cap B_j \subset A \cap B$. D'où $C \subset A \cap B$. Inversement, soit $x \in A \cap B$, alors il existe $(i_0, j_0) \in I \times J$ tel que $x \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$. Par conséquent, $x \in C$, d'où $A \cap B \subset C$.
b) On peut la montrer, soit directement comme pour a), soit en utilisant a) et Ex. 6. Pour la seconde méthode, on pose $A' = \bigcup_{i \in I} \complement_X A_i$, $B' = \bigcup_{j \in J} \complement_X B_j$, $C' = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (\complement_X A_i \cap \complement_X B_j)$. D'après a), on a $A' \cap B' = C'$. En passant au complémentaire et en utilisant Ex. 6, on obtient b).

Ex. 8 — Soit $f : X \to Y$ une application.

1) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties de X. Montrer que

a)

$$f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

b)

$$f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

et qu'il y a égalité si f est injective.

2) Soit $(B_j)_{j \in J}$ une famille non vide de parties de Y. Montrer que

a')

$$f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

b')

$$f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Ex. 9 — Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux applications, et $h = g \circ f$ l'application composée. Montrer que

a) Si h est injective, f est injective. Si de plus f est surjective, alors g est injective.

b) Si h est surjective, g est surjective. Si de plus g est injective, alors f est surjective.

Answer (Ex. 9) — a) On suppose que h est injective. Soient $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $h(x) = h(x')$. D'où $x = x'$. Si on an en plus f est surjective, alors f est bijective, et par suite $g = hf^{-1}$ est injective (la composée de deux applications injectives est injective).
b) On suppose que h est surjective. Soit $z \in Z$. Il existe $x \in X$ tel que $z = h(x) = g(f(x))$. D'où g est surjective. Si de plus g est injective, alors g est bijective, et par suite, $f = g^{-1}h$ est surjective (la composée de deux applications surjectives est surjective).

Ex. 10 — Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to T$ des applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Answer (Ex. 10) — D'après Ex. 9, g est surjective, f est injective, h surjective, et g est injective. Donc g est bijective, et par suite, $f = g^{-1} \circ g \circ f$ et $h = h \circ g \circ g^{-1}$ sont bijectives (la composée de deux applications bijectives est bijective).

Ex. 11 — Soient X un ensemble et A, B deux parties de X. On définit l'application

$$f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$$

par

$$f(Y) = (Y \cap A, Y \cap B)$$

pour tout $Y \subset X$.
À quelle condition doivent satisfaire A et B pour que f soit injective ? pour que f soit surjective ?

Answer (Ex. 11) — On a $f(\varnothing) = (\varnothing, \varnothing)$, $f(A) = (A, A \cap B)$, $f(B) = (A \cap B, B)$, $f(X) = (A, B)$, $f(A \cap B) = (A \cap B, A \cap B)$ et $f(A \cup B) = (A, B)$.
On suppose que f est injective. Puisque $F(X) = f(A \cup B)$, on a $X = A \cup B$. On va montrer que cette condition est suffisante pour que f soit injective. Soient $Y, Y' \in \mathscr{P}(X)$ tels que $f(Y) = f(Y')$. Donc $Y \cap A = Y' \cap A$ et $Y' \cap B = Y' \cap B$. D'où

$$Y = Y \cap (A \cup B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = (Y' \cap A) \cup (Y' \cap B) = Y' \cap (A \cup B) = Y'.$$

Finalement, f est injective ssi $X = A \cup B$.
On suppose maintenant que f est surjective. Donc il existe $Z \in \mathscr{P}(X)$ tels que $f(Z) = (A, \varnothing)$. Donc $Z \cap A = A$ et $Z \cap B = \varnothing$. Alors $A \subset Z$, et par suite $A \cap B \subset Z \cap B = \varnothing$. D'où $A \cap B = \varnothing$.
On suppose maintenant que cette condition est valable. Soient $(A', B') \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. On a

$$f(A' \cup B') = ((A' \cup B') \cap A, (A' \cup B') \cap B) = \big((A' \cap A) \cup (B' \cap A), (A' \cap B) \cup (B' \cap B)\big) = (A', B')$$

car $A' \cap A = A'$, $B' \cap B = B'$, $B' \cap A = A' \cap B = \varnothing$ (car $B' \cap A \subset B \cap A = \varnothing$ et $A' \cap B \subset A \cap B = \varnothing$). Finalement, f est surjective ssi $A \cap B = \varnothing$.